13/11/2019

Στο τυπολόγιο που έχει δοθεί να συμπληρωθεί

$X \sim N_k(\mu, \Sigma)$

$m_X(t) = e^{\mu^T t + t^T \Sigma t}$: Ροπογεννήτρια της κ-διάστατης κανονικής

• Κριτήρια Ανεξαρτησίας:

$1^{\underline{o}}$) $F_{\underline{X}}(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} F_{X_i}(x_i)$

$2^{\underline{o}}$) $f_{\underline{X}}(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i)$

$3^{\underline{o}}$) $m_{\underline{X}}(t_1, \dots, t_n) = \prod_{i=1}^{n} m_{X_i}(t_i)$

• ΠΡΟΤΑΣΗ:

Αν X, Y είναι ανεξάρτητες τ.μ. τότε είναι και ασυσχέτιστες

δηλ. $Cov(X, Y) = 0$

Το αντίστροφο δεν ισχύει παρά μόνο για την κανονική κατανομή.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω X, Y ανεξάρτητες τ.μ. Θδο $Cov(X,Y)=0 \Rightarrow$
$\Rightarrow E(XY) - E(X)E(Y) = 0$

$$E(XY) = \iint xy \, f_{XY}(x,y) \, dx dy$$

$$\underset{\substack{2^o \text{ κριτήριο} \\ \text{ανεξαρτησίας}}}{=} \iint xy \, f_X(x) f_Y(y) \, dx dy$$

$$= \underbrace{\int x f_X(x) dx}_{E(X)} \underbrace{\int y f_Y(y) dy}_{E(Y)}$$

$$= E(X)E(Y)$$

Έστω τώρα (X,Y) ασυσχέτιστες τ.μ. με διδιάστατη κανονική κατανομή. Θδο X, Y ανεξάρτητες.

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \sim N_2 \left[\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_X^2 & 0 \\ 0 & \sigma_Y^2 \end{pmatrix} \right]$$

Θδο X, Y ανεξάρτητες αρκεί να ικανοποιείται ένα από τα τρία κριτήρια ανεξαρτησίας

Θα δοκιμάσουμε το 3^o κριτήριο ανεξαρτησίας

$$m_{XY}(t_1, t_2) = e^{(\mu_X, \mu_Y)\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(t_1, t_2)\begin{pmatrix} \sigma_X^2 & 0 \\ 0 & \sigma_Y^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}}$$

$$= e^{\mu_X t_1 + \mu_Y t_2 + \frac{1}{2}(t_1 \sigma_X^2, \, t_2 \sigma_Y^2)\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}}$$

$$= e^{\mu_X t_1 + \mu_Y t_2 + \frac{1}{2}(t_1^2 \sigma_X^2 + t_2^2 \sigma_Y^2)}$$

$$= e^{\mu_X t_1 + \frac{1}{2} t_1^2 \sigma_X^2} \cdot e^{\mu_Y t_2 + \frac{1}{2} t_2^2 \sigma_Y^2}$$

$= m_X(t_1) \cdot m_Y(t_2)$ Άρα ανεξάρτητες

Στη συνέχεια, αρκεί να βρούμε ένα αντιπαράδειγμα όπου X, Y είναι ασυσχέτιστες τ.μ. αλλά όχι ανεξάρτητες.

Αντιπαράδειγμα

$$f_{XY}(x,y) = \frac{1}{2\pi}\cdot e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} + \frac{1}{4\pi e}x^3y^3, \quad x\in\mathbb{R},\ y\in\mathbb{R}$$

↳ Δεν είναι δηλαδή κανονική κατανομή.

Θέλω να δείξω ότι $Cov(X,Y)=0$ και $f_{XY}(x,y) \neq f_X(x)f_Y(y)$

ΛΥΣΗ

Αρκεί νδο $E(XY)=E(X)E(Y)$

Πρέπει αρχικά να βρω τις $f_X(x)$, $f_Y(y)$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} + \frac{1}{4\pi e}x^3y^3\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\,dy +$$

$$+\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{4\pi e}x^3y^3\,dy =$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy}_{\text{κανονική κατανομή}} \to 1 \quad + \frac{1}{4\pi e}x^3\int_{-\infty}^{+\infty}y^3\,dy \to 0 =$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}} \quad x\in\mathbb{R}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\,dx + \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{4\pi e}x^3y^3\,dx =$$

$$=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{y^2}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx + \frac{1}{4\pi e}y^3\int_{-\infty}^{+\infty}x^3\,dx \to 0$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx \to 1 \quad = \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{y^2}{2}}$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} \qquad y \in \mathbb{R}$$

$$f_X(x) \cdot f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-\frac{y^2}{2}} = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \neq f_{XY}(x,y)$$

• Αθροίσματα και Γραμμικοί Συνδυασμοί Ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών

$X_1, X_2, \dots, X_n$ ανεξάρτητες τ.μ. και κάποιος ενδιαφέρεται για την εύρεση της κατανομής της τ.μ. $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$

Κάποιες φορές για την εύρεση αυτής μας βοηθάει η μέθοδος της ροπογεννήτριας

Προσοχή!!!
Αυτός ο τρόπος δεν δουλεύει πάντα. Αλλά όταν δουλεύει, δουλεύει πολύ γρήγορα

Ποιά είναι η ροπογεννήτρια της Y

$$m_Y(t) \overset{\text{ορ.}}{=} E(e^{tY}) = E(e^{t(X_1+X_2+\dots+X_n)}) = E(e^{tX_1} e^{tX_2} \cdots e^{tX_n})$$

$$= E(e^{tX_1}) E(e^{tX_2}) \cdots E(e^{tX_n})$$

Ιδιότητα Ανεξάρτητων Τ.Μ.

$$= m_{X_1}(t)\, m_{X_2}(t) \cdots m_{X_n}(t) = \prod_{i=1}^{n} m_{X_i}(t)$$

Άρα $m_Y(t) = \prod_{i=1}^{n} m_{X_i}(t)$

$1^{η}$ Πρόταση

$X_1, X_2, \ldots, X_n \sim B(n_i, p)$

p: Η πιθανότητα επιτυχίας είναι ίδια για όλα τα X_i (αν δεν ήταν δεν θα δούλευε η μέθοδος)

$Y = \Sigma X_i$??

Από την $m_Y(t) = \prod_{i=1}^{n} m_{X_i}(t) =$

$= \prod_{i=1}^{n} [p \cdot e^t + (1-p)]^{n_i} = [pe^t + (1-p)]^{\Sigma n_i}$

Άρα είναι η ροπογεννήτρια της $B(\Sigma n_i, p)$

$2^{η}$ Πρόταση

$X_1, X_2, \ldots, X_n \sim P(\lambda_i)$

$Y = \Sigma X_i$?

Από την $m_Y(t) = \prod_{i=1}^{n} m_{X_i}(t) = \prod_{i=1}^{n} e^{\lambda_i(e^t - 1)} = e^{\Sigma \lambda_i (e^t - 1)}$

$Y \sim Poisson(\Sigma \lambda_i)$

$3^{η}$ Πρόταση

$X_1, X_2, \ldots, X_n \sim NB(k_i, p)$

$Y = \Sigma X_i$?

Από την $m_Y(t) = \prod_{i=1}^{n} \frac{p^{k_i} e^{tk_i}}{(1-pe^t)^{k_i}} = \frac{p^{\Sigma k_i} e^{t\Sigma k_i}}{(1-pe^t)^{\Sigma k_i}}$

$Y \sim NB(\Sigma k_i, p)$

4η Πρόταση

$X_1, X_2, \dots, X_n \sim Geo(p)$

$Y = \sum X_i$?

$$m_Y(t) = \prod_{i=1}^{n} \frac{pe^t}{1-(1-p)e^t} = \left[\frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}\right]^n \quad , \quad t < -\ln(1-p)$$

$Y \sim NB(n, p)$

5η Πρόταση

$X_1, X_2, \dots X_n$ ανεξάρτητες τ.μ. $Εκθ(\lambda)$

$Y = \sum X_i$

$$m_Y(t) = \prod_{i=1}^{n} m_{X_i}(t) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda}{\lambda - t} = \left[\frac{\lambda}{\lambda - t}\right]^n \quad t < \lambda$$

$$= \left[\frac{\lambda - t}{\lambda}\right]^{-n} = \left[1 - \frac{1}{\lambda}t\right]^{-n}$$

$Y \sim Γάμμα\left(n, \frac{1}{\lambda}\right)$

Σημείωση για το αντιπαράδειγμα

Άλλο αντιπαράδειγμα:

X, Y ασυσχέτιστες αλλά όχι ανεξ/τες

$X \sim U(-1,1) \quad , \quad Y = X^2$

$f_X(x) = \frac{1}{2} \qquad -1 < x < 1$

Ασυσχέτιστες ?

ΝΔΟ $Cov(X, X^2) = E(X^3) - E(X)E(X^2) = 0$

$E(X^3) = \int_{-1}^{1} x^3 \frac{1}{2} dx = 0$. Αντίστοιχα $E(X) = 0$

Αντιπαράδειγμα (Γενικά)

$$f_{XY}(x,y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} + \frac{1}{4\pi e} x^3 y^3$$

(X, Y) δεν είναι διδιάστατη κανονική

Παρ' όλα αυτά $X \sim$ κανονική

$Y \sim$ κανονική

ξέρουμε $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \sim N_2 \Rightarrow X, Y$ κανον.

Άσκηση 3.1 Σελ 100

Έστω X, Y, Z τ.μ. με από κοινού κατανομή

$P(X=1, Y=0, Z=0) = P(X=0, Y=1, Z=0) = \frac{1}{4}$

$P(X=0, Y=0, Z=1) = P(X=1, Y=1, Z=1) = \frac{1}{4}$

ΝΔΟ οι τ.μ. X, Y, Z είναι ανά δύο ανεξάρτητες αλλά και οι τρεις ολικά δεν είναι ανεξάρτητες.

ΛΥΣΗ

X τ.μ. έχει δυνατές τιμές 0, 1

Y τ.μ. έχει δυνατές τιμές 0, 1

Z τ.μ. έχει δυνατές τιμές 0, 1

$P(X=0) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ $\quad P(X=1) = \frac{1}{2}$

$P(Y=0)=\frac{1}{2}$ $\quad$ $P(Y=1)=\frac{1}{2}$

$P(Z=0)=\frac{1}{2}$ $\quad$ $P(Z=1)=\frac{1}{2}$

Έστω (X,Y) τυχαίο διάνυσμα. Δυνατές τιμές: $(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)$

$$P(X=0,Y=0)=\sum_{z=\{0,1\}} P(X=0,Y=0,Z=z)=\frac{1}{4}$$

$$P(X=0,Y=1)=\sum_{z=\{0,1\}} P(X=0,Y=1,Z=z)=\frac{1}{4}$$

$$P(X=1,Y=0)=\sum_{z=\{0,1\}} P(X=1,Y=0,Z=z)=\frac{1}{4}$$

$$P(X=1,Y=1)=\sum_{z=\{0,1\}} P(X=1,Y=1,Z=z)=\frac{1}{4}$$

$P(X=x,Y=y)=P(X=x)P(Y=y)$
όμοια για την X και Z
και όμοια για την Y και Z
} Άρα είναι ανά 2 ανεξάρτητες

Όμως ολικά:

$$\frac{1}{4}=P(X=1,Y=0,Z=0)\neq P(X=1)P(Y=0)P(Z=0)=\frac{1}{8}$$

άρα ολικά δεν είναι ανεξάρτητες

Άσκηση 3.2 Σελ 100

Να εξεταστεί αν οι τ.μ. X,Y,Z με από κοινού σ.π.π.
$f(x,y,z)=8xyz$ $\quad 0<x<1,\ 0<y<1,\ 0<z<1$ είναι ανεξάρτητες.

ΛΥΣΗ

Θέλω να εξετάσω αν η από κοινού $f(x,y,z)=f_X(x)\,f_Y(y)\,f_Z(z)$

$$f_X(x)=\int_0^1\int_0^1 8xyz\,dy\,dz=\dots=2x \quad ,\ 0<x<1$$

$f_Y(y)=2y$ $\quad ,\ 0<y<1$

$f_2(z) = 2z \quad 0<z<1$

Άρα από 2ο κρ. Ανεξ. ναι είναι ανεξ/τες.

ΑΣΚΗΣΗ 3.3 Σελ 100

ΝΔΟ αν δύο τ.μ. έχουν δισδιάστατη κανονική κατανομή τότε είναι ανεξάρτητες αν-ν είναι ασυσχέτιστες

ΛΥΣΗ

Στη θεωρία δείξαμε ήδη (απόδειξη σε εξετάσεις)

$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \sim N_2\left[\begin{pmatrix} \mu_X \\ \mu_Y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_X^2 & 0 \\ 0 & \sigma_Y^2 \end{pmatrix}\right]$ ασυσχέτιστες τότε είναι ανεξάρτητες

ΘΔΟ $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ ανεξάρτητες τότε ασυσχέτιστες

ΑΣΚΗΣΗ 3.4 Σελ 100

Αν το τ. διάνυσμα (X,Y) είναι ομοιόμορφη κατανομή στον κύκλο $\{(x,y): x^2+y^2 \leq r^2\}$ νδο οι τ.μ. X και Y είναι ασυσχέτιστες αλλά όχι ανεξάρτητες

ΛΥΣΗ

$f_{X,Y}(x,y) = \dfrac{1}{\text{εμβαδό}}$ αφού παριστάνει ισοπιθανα στις 2-διαστάσεις

$= \dfrac{1}{\pi r^2} \quad (x,y) \in A: \{(x,y): x^2+y^2 \leq r^2\}$

$f_X(x) = \int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} \dfrac{1}{\pi r^2}\, dy \quad , -r \leq x \leq r \quad , -\sqrt{r^2-x^2} \leq y \leq \sqrt{r^2-x^2}$

Άρα $f_X(x) = \dfrac{2\sqrt{r^2-x^2}}{\pi r^2} \quad , -r<x<r$

$f_Y(y) = \dfrac{2\sqrt{r^2-y^2}}{\pi r^2} \quad , -r<y<r$

Προφανώς $f_X(x)f_Y(y) \neq f_{XY}(x,y)$

$$E(X) = \int_{-r}^{r} x \frac{2\sqrt{r^2-x^2}}{\pi r^2} dx = 0$$

$$E(Y) = \int_{-r}^{r} y \frac{2\sqrt{r^2-y^2}}{\pi r^2} dy = 0$$

$$E(XY) = \int_{-r}^{r}\int_{-\sqrt{r^2-y^2}}^{\sqrt{r^2-y^2}} xy \frac{1}{\pi r^2} dx dy = 0$$

Ασυσχέτιστες αλλά <u>ΟΧΙ</u> ανεξάρτητες.

<u>ΑΣΚΗΣΗ 3.5 ΣΕΛ 100</u>

Αν $X_1, \dots, X_n$ ανεξάρτητες τ.μ. με $E(X_i) = \mu_i$ και $Var(X_i) = \sigma^2$ και $a = (a_1, \dots, a_n)'$, $b = (b_1, \dots, b_n)'$ διανύσματα τότε οι γραμμικοί συνδυασμοί $\sum_{i=1}^{n} a_i X_i$, $\sum_{i=1}^{n} b_i X_i$ είναι ασυσχέτιστοι όταν τα διανύσματα a, b είναι ορθογώνια

<u>ΛΥΣΗ</u>

Πότε $Cov(\sum a_i X_i, \sum b_i X_i) = 0$

$$Cov\left[(a_1, \dots, a_n)\begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}, (b_1, \dots, b_n)\begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}\right] = Cov(AX, BX) = A\,Cov(X)\,B^T$$

$$= (a_1, \dots, a_n)\begin{bmatrix} \sigma^2 & & 0 \\ & \sigma^2 & \\ 0 & & \sigma^2 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \sigma^2 (a_1, \dots, a_n)\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Είναι ασυσχέτιστα όταν $(a_1, \dots, a_n)\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = 0$

<u>ΑΣΚΗΣΗ 3.6 ΣΕΛ 100</u>

Αν $X_1 \sim N_k(\mu_1, \Sigma_1)$, $X_2 \sim N_k(\mu_2, \Sigma_2)$ ανεξάρτητες k-διάστατα τυχαία διανύσματα νδο:

$a_1 X_1 + a_2 X_2 \sim N(a_1\mu_1 + a_2\mu_2, a_1^2 \Sigma_1 + a_2^2 \Sigma_2)$

<u>ΛΥΣΗ</u>

$Y = a_1 X_1 + a_2 X_2$

$$M_Y(t) \overset{\text{ορ}}{=} E(e^{t^T Y}) = E(e^{t^T(a_1 X_1 + a_2 X_2)}) = E(e^{t^T a_1 X_1} e^{t^T a_2 X_2})$$

$$\underset{\text{ανεξ.}}{\overset{X_1, X_2}{=}} E(e^{t^T a_1 X_1}) E(e^{t^T a_2 X_2})$$

$$= M_{X_1}(a_1 t) M_{X_2}(a_2 t)$$

$$= e^{\mu_1^T a_1 t + \frac{1}{2} a_1 t^T \Sigma_1 a_1 t} \cdot e^{\mu_2^T a_2 t + \frac{1}{2} a_2 t^T \Sigma_2 a_2 t}$$

$$= e^{(\mu_1^T a_1 + \mu_2^T a_2) t + \frac{1}{2} t^T (a_1^2 \Sigma_1 + a_2^2 \Sigma_2) t}$$

$$= e^{(\mu_1 a_1 + \mu_2 a_2)^T t + \frac{1}{2} t^T (a_1^2 \Sigma_1 + a_2^2 \Sigma_2) t}$$

$N_k(\mu_1 a_1 + \mu_2 a_2, \ a_1^2 \Sigma_1 + a_2^2 \Sigma_2)$

ΑΣΚΗΣΗ 3.7 Σελ 101

Αν $f(x,y) = 8xy$, $0 < x < y < 1$ και μηδέν αλλού, είναι οι τ.μ. X και Y ανεξάρτητες;

ΛΥΣΗ

Θα ελέγξω αν $f(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$

$f_X(x) = \int_x^1 8xy \, dy = 4x(1 - x^2)$, $0 < x < 1$

$f_Y(y) = \int_0^y 8xy \, dx = 4y^3$ $0 < y < 1$

Για $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{2}{27}$ δεν ισχύει η ισότητα $\left(\frac{27}{8} \neq 3\right)$

Άρα όχι ανεξάρτητες

ΑΣΚΗΣΗ 10 ΣΕΛ 101

Αν X και Y είναι δύο ανεξάρτητες τ.μ. με $P(a<X<b)=\frac{2}{3}$ και $P(c<Y<d)=\frac{5}{8}$ να βρεθεί η πιθανότητα της ένωσης των ενδεχομένων $a<X<b, -\infty<Y<+\infty$ και $-\infty<X<+\infty, c<Y<d$.

ΛΥΣΗ

$A=\{a<X<b, -\infty<Y<+\infty\}$
$B=\{-\infty<X<+\infty, c<Y<d\}$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

$$=\frac{2}{3}+\frac{5}{8}-P(a<X<b, c<Y<d)$$

$$=\frac{2}{3}+\frac{5}{8}-\frac{2\cdot 5}{3\cdot 8}=\frac{31}{24}-\frac{10}{24}=\frac{21}{24}=0{,}875$$

ΑΣΚΗΣΗ 3.11 ΣΕΛ 101

Αν $X_1,\dots,X_k$ ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές να βρεθεί η

$$E\left(\frac{X_i}{X_1+\dots+X_k}\right)$$

ΛΥΣΗ

Ισχύει $E\left(\frac{X_1+\dots+X_k}{X_1+\dots+X_k}\right)=1 \Rightarrow E\left(\frac{X_1}{X_1+\dots+X_k}\right)+E\left(\frac{X_2}{X_1+\dots+X_k}\right)+\dots+E\left(\frac{X_k}{X_1+\dots+X_k}\right)$

$$=1 \Rightarrow kE\left(\frac{X_i}{X_1+\dots+X_k}\right)=1 \Rightarrow E\left(\frac{X_i}{X_1+\dots+X_k}\right)=\frac{1}{k}$$